数理解析研究所講究録
474巻 1982年 62-65


# 既約曲線の exponents について

埼玉大　矢野　環

## §1. exponents 問題.

(1.1) 孤立特異点の重要な numerical invariants である "exponents" を，既約曲線の場合に決定したい．"exponents" には，三通りの種類があり，一つは一般的には定義されていない．残り2つは "b-exponents" 即ち，Gauss-Manin connection の saturated lattice を用いるもの，あるいは b-函数論で出てくるものであり，さらに "MH-exponents" 即ち，Mixed-Hodge structure に関係して定義されたものである．いずれも exponents は $\mu$ ($=$ Milnor 数) 個の正の有理数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_\mu$ であり，$\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_i)$ $i=1..\mu$ は，局所モノドロミーの固有値の全体と，重複度をこめて一致している．ここでは前者，"b-exponents" をあつかう．

(1.2) $f: \mathbb{C}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{C}, 0$ を解析函数の芽，$f^{-1}(0)$ は原点で既約曲線を定め，特性対が $(n, \beta_1, \cdots, \beta_g)$ であるとする．例えば次の Puiseux 級数で与えられるもの．

$$y = x^{\beta_1/n} + x^{\beta_2/n} + \cdots + x^{\beta_g/n}.$$

特性列の性質より,

(1.2.1) $e^{(i)} = g.c.d.(n, \beta_1, \dots, \beta_i) \qquad i=1,\dots,g$

とおくと, $e^{(i)}$ は $e^{(i-1)}$ の真の約数であり, $e^{(g)}=1$.

(1.3) b-exponents は $(n, \underline{\beta})$ のみでは決定されない.
そこで問題は次の2つにわかれる.

問A. $f$ の特性列が $(n, \underline{\beta})$ であるとき, 必ず b-exponents となるような数の組を指定せよ.

問B. 特性列 $(n, \underline{\beta})$ をもつような, 十分一般な $f$ について, b-exponents を(すべて)与えよ.

(1.4) 実用上, 又理論上も, exponents $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ は, その母函数 $P(t)$ によって与えるのがよい.

(1.4.1) $P(t) = \sum_{i=1}^{\mu} t^{\alpha_i}$

(1.4.2) $f = x^2 + y^3$, $\alpha_1 = 5/6$, $\alpha_2 = 7/6$.

$$P(t) = t^{5/6} + t^{7/6} = \frac{(t^{1/2}-t)(t^{1/3}-t)}{(1-t^{1/2})(1-t^{1/3})}$$

$$= t^{5/6}\frac{1-t}{1-t^{1/6}} - t^{2/2}\frac{1-t}{1-t^{1/2}} - t^{3/3}\frac{1-t}{1-t^{1/3}} + t$$

(1.5) $\alpha_f = \min_{i=1\cdots\mu} \alpha_i$ とおき minimal exponent とよぶ. これについては次が知られている. (Varchenko, Kato-Yano)

(1.5.1) $\alpha_f = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\beta_1}$.

## §2. 定義. 予想

(2.1) 定義. $(n, \beta)$ から, 下記の自然数を定める.

$$e^{(i)} = g.c.d.(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_i) \quad i=1,\ldots,g, \quad \beta_0 = e^{(0)} = n.$$

$$r_i = (\beta_i + n)/e^{(i)}$$

$$R_i = \{\beta_i e^{(i-1)} + \beta_{i-1}(e^{(i-2)} - e^{(i-1)}) + \cdots + \beta_1(n - e^{(1)})\}/e^{(i)},$$

$$r_i' = [r_i e^{(i)}/e^{(i-1)}] + 1 = r_{i-1} + [(\beta_i - \beta_{i-1})/e^{(i-1)}] + 1$$

$$R_i' = R_i e^{(i)}/e^{(i-1)} = R_{i-1} + \beta_i - \beta_{i-1}$$

$$r_0' = 2, \quad R_0' = n.$$

(2.2) 定義. $(n, \beta)$ に付随する分数巾多項式とは,

$$R((n,\beta),t) = \sum_{i=1}^{g} t^{r_i/R_i} \frac{1-t}{1-t^{1/R_i}} - \sum_{i=0}^{g} t^{r_i'/R_i'} \frac{1-t}{1-t^{1/R_i'}} + t.$$

(2.3) 命題. 特性列 $(n, \beta)$ に対し, $R((n,\beta),t)$ を展開すれば, 非負整数係数の分数巾の多項式となる. //

この命題は, 次の2つの補題に帰着する.

(2.3.1) 補題. $i=1,\ldots,g$ について次の関係が成立する.

1) $R_i' \mid R_i$ 2) $r_i'/R_i' > r_i/R_i$ 3) $(r_i'-1)/R_i' \le (r_i-1)/R_i$.

(2.3.2) 補題 さらに, 1) $r_0'/R_0' > r_1/R_1$ /.

2) $(r_0'-1)/R_0' \le (r_1-1)/R_1$ 3) $e^{(1)} \mid R_2$ 4) $e^{(1)} \nmid R_2'$

5) $r_2/R_2 < 1/e^{(1)}$. //

(2.4) 予想　特性列 $(n, \beta)$ であるような殆どすべての特異点について

$$P(t) = R((n,\beta), t).$$

ここで「殆どすべて」とは、特性列 $(n, \beta)$ であるような芽のなす modality 次元の ($\mu$-constant) stratum において、open dense な芽について、という意味に解する.

上記は §1 の問 B に対する一つの解答である. 問 A については、B.L. Lichtin 氏も次の予想を提出している.

(2.5) 予想. 特性列 $(n, \beta)$ であるような特異点については、b-exponents は $r_1/R_1$, $r_2/R_2$, … $r_g/R_g$ を含む.

(1.5) によれば、$g=1$ のとき (2.5) は正しい.

§3. 定理.

(3.1) 定理. (2.4) はすべての m-modal 特異点 ($m \leq 3$) で、既約曲線で定義されるものについて成立する. //

それ以外については、

(3.2) 命題 (加藤満生) (2.4) は特性列 (5, 7), (4, 9) について成立する. (いずれも 4-modal).

実際、(2.4) の $g=1$ の場合は、加藤氏によってなされていた予想と一致している. //

これらについて、特異点解消の図式との関連なども知られるが、すべて省略する. (尚、(3.1) は特性列 (4, 6, 2p+5) を含む))